CHAPITRE 4
ANALYSE SPECTRALE

SPEIT

A. DÉCOMPOSITION DE FOURIER D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

A.1. Théorème fondamental

- Énoncé

Soit $f(t)$ une fonction T-périodique quelconque, on peut écrire :

$$\boldsymbol{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)], \omega = \frac{2\pi}{T},}$$

$$\boldsymbol{A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\mathrm{d}t = \langle f \rangle,}$$

A_n, B_n $(n \geq 1)$: coefficients de Fourier,

$$\boldsymbol{A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t, B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.}$$

Vocabulaire

- $\boldsymbol{A_0}$: **terme constant**
- Terme de $\boldsymbol{\omega}$: **terme fondamental**
- Terme de $\boldsymbol{n\omega}$: **terme harmonique d'ordre $\boldsymbol{n}$**

Description mathématique : 3 remarques importantes (P77 du poly)

Parité

- Si $f(t)$ **paire** $\left(\forall t, f(t) = f(-t)\right) \Longrightarrow \boldsymbol{B_n = 0}, \forall n \geq 1$
- Si $f(t)$ **impaire** $\left(\forall t, f(-t) = -f(t)\right) \Longrightarrow \boldsymbol{A_n = 0}, \forall n \geq 1$

A.2. Représentation spectrale d'une fonction périodique

SPEIT

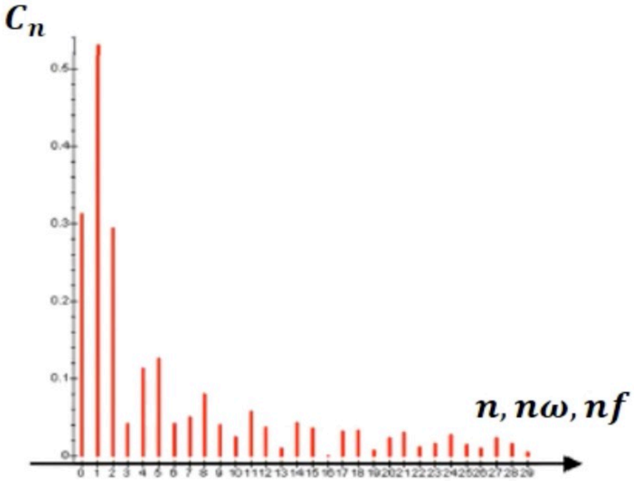
- **Amplitude** et **phase**

$$A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) = \boldsymbol{C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)}$$

$C_n = \sqrt{{A_n}^2 + {B_n}^2}$: amplitude de l'harmonique n et $\cos\varphi_n = \dfrac{A_n}{C_n}$, $\sin\varphi_n = -\dfrac{B_n}{C_n}$

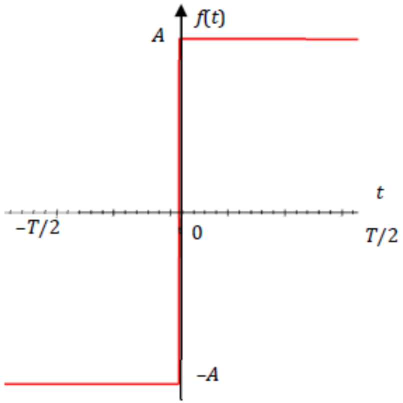
$$\boxed{\boldsymbol{f(t) = \langle f\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)}}$$

- **Spectre**
  - Spectre en amplitude
  - Spectre en phase



A.3. Exemples

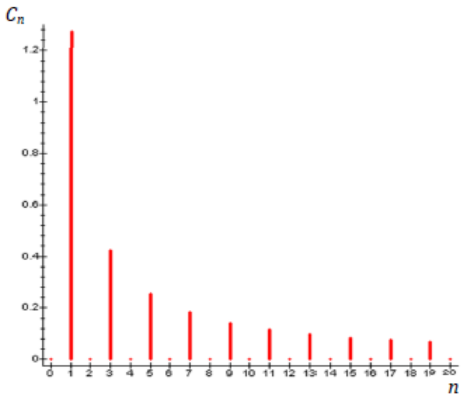
A.3.a. Signal carré de valeur moyenne nulle



- $\langle f \rangle = 0$, $f(t)$ **impaire** $\Rightarrow A_n = 0, \forall n \geq 1$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

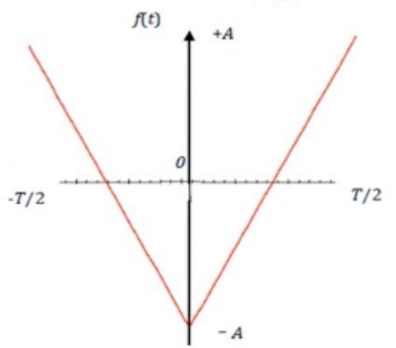
Remarque : $\begin{cases} n \text{ paire} : B_n = 0 \\ n \text{ impaire} : B_n = 4A/(n\pi) \ (\downarrow \text{en } 1/n) \end{cases}$



- **Spectre** : Fig. 4−3 (P80 du poly)

SPEIT

A.3.b. Signal triangulaire



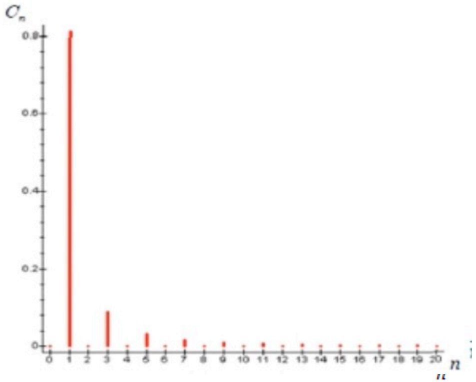
- $f(t)$ **paire** $\Rightarrow B_n = 0, \forall n \geq 1$

1. $A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$

2. $f'(t) =$ **signal carré d'amplitude** $4A/T$

$$\Rightarrow f'(t) = \sum -A_n n\omega \sin(n\omega t) = \sum \frac{2}{n\pi}\frac{4A}{T}[1-\cos(n\pi)]\sin(n\omega t)$$

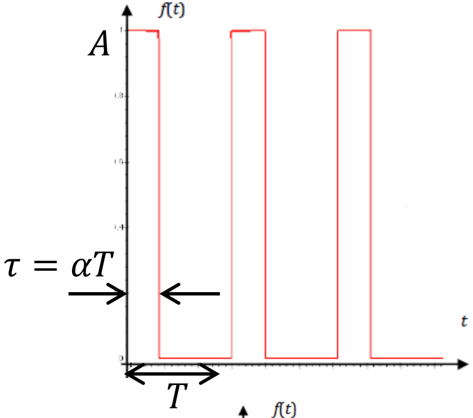
$$\Rightarrow A_n = \frac{8A}{n^2\pi\omega T}[\cos(n\pi)-1] = \frac{4A}{n^2\pi^2}[\cos(n\pi)-1]$$



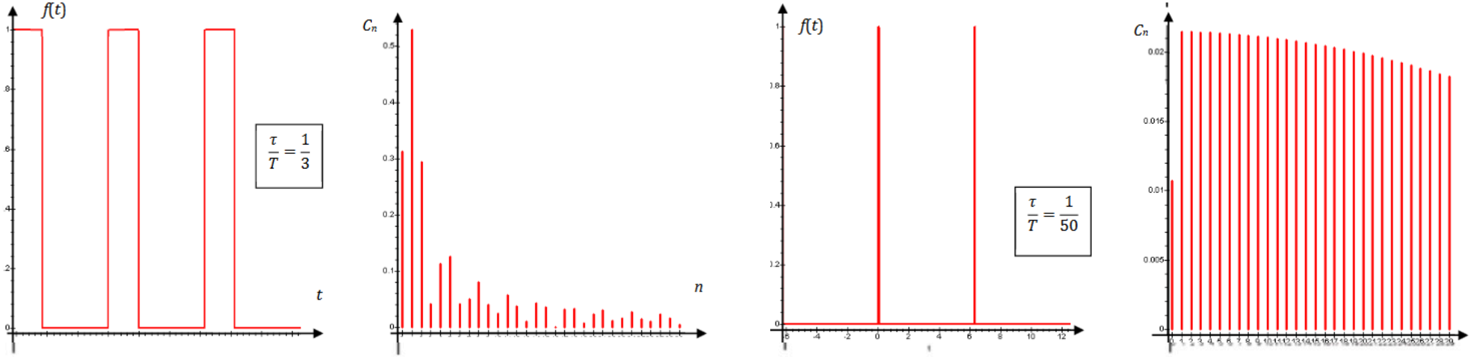
Remarque : $\begin{cases} n \text{ paire} : A_n = 0 \\ n \text{ impaire} : A_n = -8A/(n^2\pi^2)\ (\downarrow \text{ en } 1/n^2) \end{cases}$

- **Spectre** : Fig. 4–5 (P82 du poly)

A.3.c. Train d'implusions



- $\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} A\mathrm{d}t = \alpha A$
- $A_n = \frac{2A\tau}{T}\mathrm{sinc}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$
- **Spectre** de α différent : Fig. 4-6 (P83 du poly)



Remarque : **Plus** un signal est **bref dans le domaine temporel**, **plus grand** est le **nombre d'harmonique** nécessaire pour approcher le signal.

A.4. Relation de Parseval

- **Égalité de Parseval**

$$f(t) \text{ périodique}, f(t) = \langle f \rangle + \sum_{n\geq 1} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$\boxed{\langle f^2 \rangle = \langle f \rangle^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} {C_n}^2}$$

- Interprétation **energetique** en electricite

$$R : u(t) = \langle u \rangle + \sum_{n\geq 1} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Puissance moyenne reçue par R : $\mathcal{P} = \dfrac{\langle u^2 \rangle}{R}$

SPEIT

$$\langle f^2 \rangle = \langle f \rangle^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} {C_n}^2$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{\langle \boldsymbol{u} \rangle^2}{\boldsymbol{R}} + \sum_{\boldsymbol{n}} \frac{{\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}}^2}{2\boldsymbol{R}}$$

- Si $\langle \boldsymbol{u} \rangle$ **seul (RS)** : $\boldsymbol{\mathcal{P}}_0 = \frac{\langle \boldsymbol{u} \rangle^2}{\boldsymbol{R}}$
- Si **l'harmonique** $\boldsymbol{n}$ **seul (RSE)** : $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\boldsymbol{n}} = \frac{{\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}}^2}{2\boldsymbol{R}}$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}_0 + \sum_{\boldsymbol{n}\geq 1} \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\boldsymbol{n}}$$

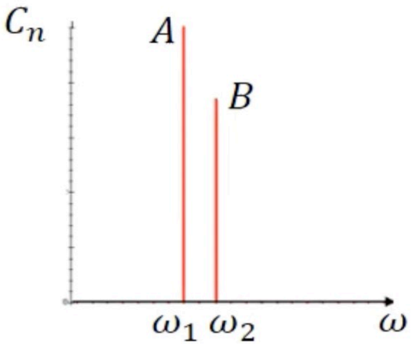
La **puissance moyenne** associée à $u(t)$ est la **somme de puissances moyennes associées à chaque harmonique**.

B. SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

B.1. Fonctions à spectre discret

B.1.a. Somme et produit de fonctions sinusoïdales

- Somme $f(t) = A\cos(\omega_1 t) + B\cos(\omega_2 t)$



- Produit

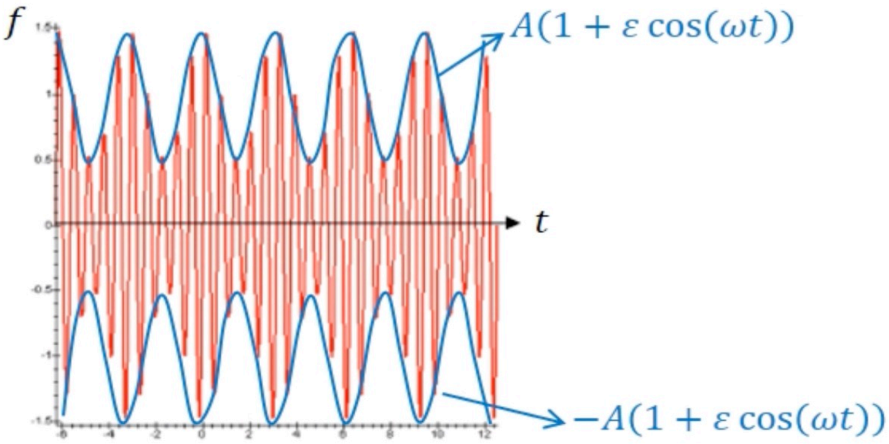
$$f(t) = A\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) = \frac{A}{2}[\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t]$$

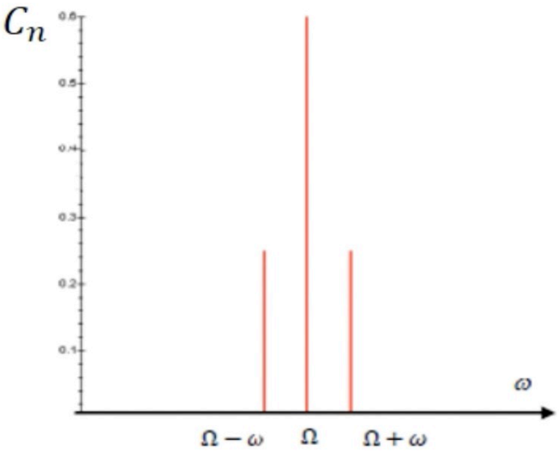
B.1.b. Modulation d’amplitude

- **Modulation sinusoïdale**

$$f(t) = A\cos(\Omega t)\,(1+\varepsilon\cos(\omega t)),\ \varepsilon < 1, \Omega > \omega$$

载波 **porteuse** **signal modulant** 调制信号





$$f(t) = A\cos(\Omega t) + \frac{A\varepsilon}{2}[\cos(\Omega+\omega)t + \cos(\Omega-\omega)t]$$

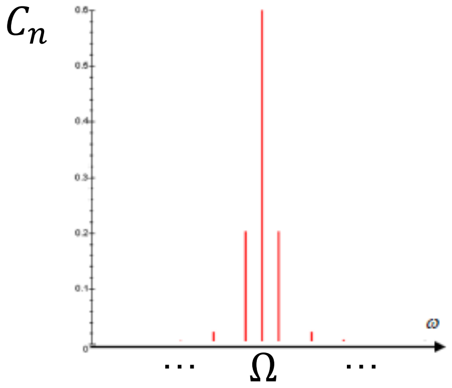
SPEIT

Modulation périodique

$$\boldsymbol{f(t) = A\cos(\Omega t)\big(1 + \varepsilon m(t)\big)}$$

$$m(t) \text{ de } T = \frac{2\pi}{\omega} : m(t) = \sum C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$\boldsymbol{f(t) = A\cos(\Omega t) + \sum \frac{A\varepsilon C_n}{2}\{\cos[(\Omega + n\omega)t + \varphi_n] + \cos[(\Omega - n\omega)t - \varphi_n]\}}$$



B.2. Contenu spectral d'un signal quelconque

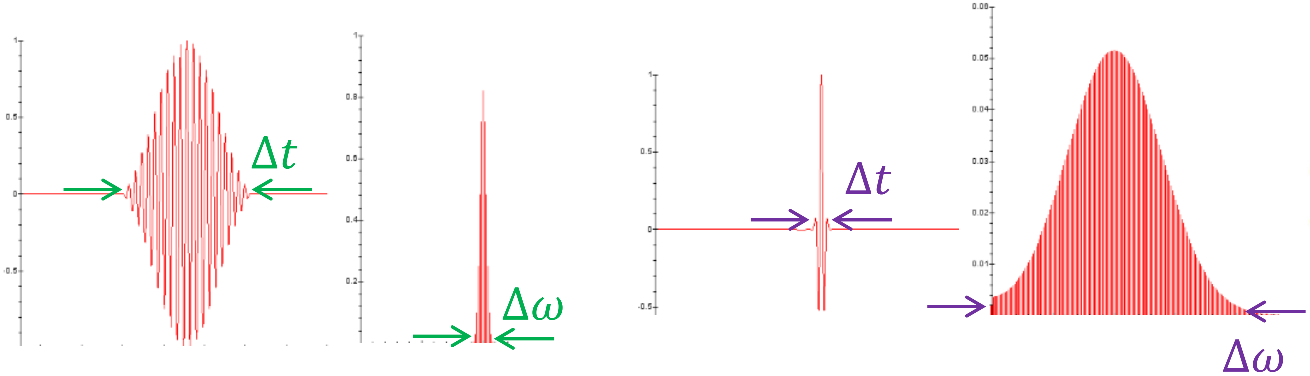
B.2.b. Généralisation : largeur spectrale $\Delta\omega$ et durée temporelle Δt

- $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} F(\Omega)\cos\big(\Omega t + \varphi(\Omega)\big)\mathrm{d}\Omega\,, F(\Omega) \leftrightarrow C_n, \varphi(\Omega) \leftrightarrow \varphi_n$

- Admis : $\boxed{\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 2\pi}$

  $\Delta\omega$: intervalle de pulsation quand C_n non nulle

  Δt : intervalle de temps quand $f(t)$ non nulle



(Fig. 4-11: P89 du poly)

- $\Delta t \to 0, \Delta\omega \to +\infty$
- $\Delta t \to +\infty, \Delta\omega \to 0$

C. ACTION D'UN OPÉRATEUR LINÉAIRE (OL) SUR UN SIGNAL PÉRIODIQUE

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{OL}} \xrightarrow{s(t)\,?} \qquad e(t) = \langle e \rangle + \sum_{n\geq 1} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- Rappel en **RSE :** $\underline{H}(j\omega) = \underline{s}/\underline{e} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$
- $e(t)$ $\qquad$ $s(t)$

$$\langle e \rangle \longrightarrow \boldsymbol{H(0)\langle e \rangle = H_0\langle e \rangle}$$

$$C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \longrightarrow \boldsymbol{H(n\omega)\, C_n \cos\big(n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega)\big)}$$

$$\xrightarrow{\text{OL}} \boxed{\boldsymbol{s(t) = H_0\langle e \rangle + \sum_{n\geq 1} H(n\omega)\, C_n \cos\big(n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega)\big)}}$$

- **Spectre** de $s(t)$: $\boxed{\boldsymbol{\langle s \rangle = H_0\langle e \rangle,\ C_n{}' = H(n\omega)\, C_n,\ \varphi_n{}' = \varphi_n + \varphi(n\omega)}}$