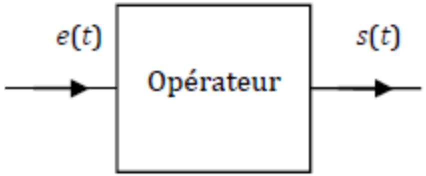
CHAPITRE 3
OPÉRATEUR LINÉAIRE

A. NOTION D'OPÉRATEUR

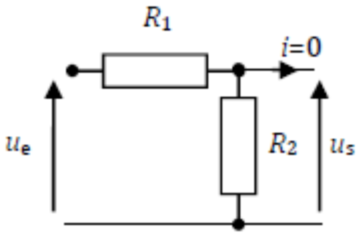
- **Définition** : dispositif qui **transforme** sur un signal



$e(t)$: signal d'**entrée**
$s(t)$: signal de **sortie**

- **Exemples** :

1.



sortie   entrée

$$u_s(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_e(t)$$

2. Système masse-ressort excité par une force $F(t)$

$F(t)$: entrée, $\xi(t)$: sortie

$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} = -k\xi + F(t)$$

SPEIT

B. ACTION D'UN OPÉRATEUR DANS LE DOMAINE TEMPOREL

B.1. Équation différentielle caractéristique (EDC)

B.1.a. Définition

$$\boxed{EDC : \sum_{n=0}^{N_s} \alpha_n \frac{\mathrm{d}^n s(t)}{\mathrm{d}t^n} = \sum_{n=0}^{N_e} \beta_n \frac{\mathrm{d}^n e(t)}{\mathrm{d}t^n} \quad (\alpha_n, \beta_n \text{ constantes})}$$

1. $s(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2} e(t) : \alpha_0 = 1, \beta_0 = \frac{R_2}{R_1+R_2}$, toutes les autres α_n, β_n nuls

2. $m \frac{\mathrm{d}^2 \xi}{\mathrm{d}t^2} + k\xi = F(t) : \alpha_2 = m, \alpha_0 = k, \beta_0 = 1$

- **Ordre de l'opérateur** : N_s

SPEIT

B.1.b. Propriétés

Linéarité : principe de superposition

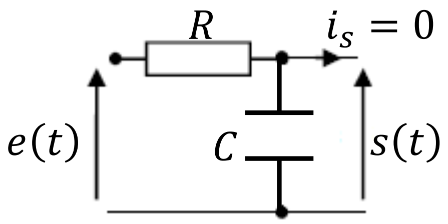
$$e_1(t) \to s_1(t), e_2(t) \to s_2(t)$$
$$\lambda e_1(t) + \mu e_2(t) \to \lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$$

Invariance par translation dans le temps :

Si $e(t) \to s(t)$

Alors $e(t-\tau) \to s(t-\tau)$

B.1.c. Exemple : cellule *RC* ouverte

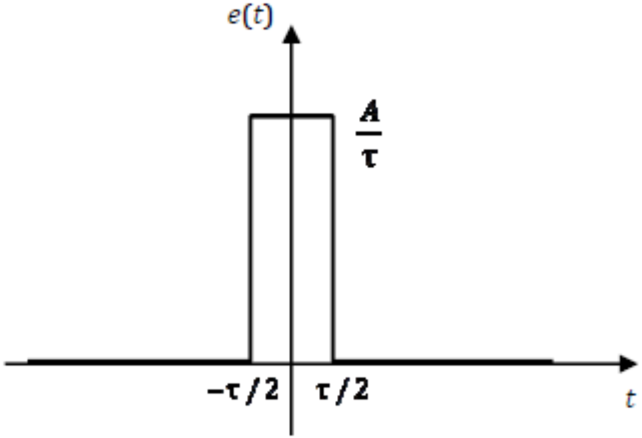


$$RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = e(t)$$

SPEIT

B.2. Réponses temporelles remarquables

B.2.b. Réponse impulsionnelle



$e(t)$: impulsion de Dirac ($\tau \to 0$)

$$e(t) = \begin{cases} \frac{A}{\tau} & \text{si } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$s(t)$? avec τ fini

- $t \leq -\frac{\tau}{2}$: $s(t) = 0$
- $-\frac{\tau}{2} < t \leq \frac{\tau}{2}$: $RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = \frac{A}{\tau}$ Solution : $\boldsymbol{s(t) = \frac{A}{\tau} + \alpha \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$

$$\boldsymbol{s}\left(-\frac{\boldsymbol{\tau}^+}{\mathbf{2}}\right) = \boldsymbol{s}\left(-\frac{\boldsymbol{\tau}^-}{\mathbf{2}}\right) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{A}{\tau}\exp\left(-\frac{\tau}{2RC}\right) \Rightarrow s(t) = \frac{A}{\tau}\left[1 - \exp\left(-\frac{t + \tau/2}{RC}\right)\right]$$

SPEIT

- $t > \frac{\tau}{2} : RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = 0$ Solution : $s(t) = \alpha' \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$

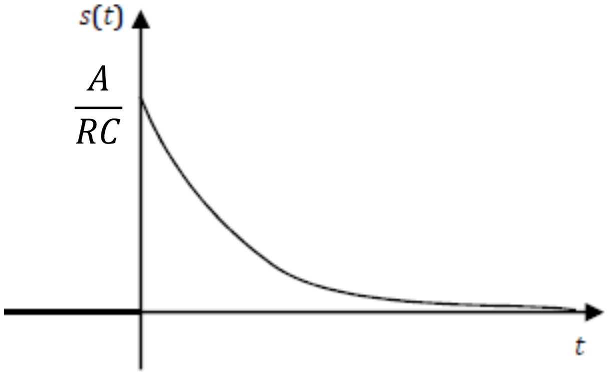
$$s\left(\frac{\tau^+}{2}\right) = s\left(\frac{\tau^-}{2}\right) = \frac{A}{\tau}\left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)\right] \Rightarrow \alpha' = \frac{A}{\tau}\left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)\right]\exp\left(\frac{\tau}{2RC}\right)$$

$$\Longrightarrow s(t) = \frac{A}{\tau}\left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)\right]\exp\left(-\frac{t - \tau/2}{RC}\right)$$

- $\boldsymbol{\tau \to 0}$

$$t > 0 : \mathbf{exp}\left(-\frac{\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{RC}}\right) \approx \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{RC}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{s(t)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{t < 0} \\ \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{RC}}\mathbf{exp}\left(-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{RC}}\right) & \boldsymbol{t > 0} \end{cases}}$$



B.3. Stabilité d'un opérateur

EDC : $\sum \boldsymbol{\alpha}_n \frac{\mathbf{d}^n \boldsymbol{s}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}^n} = \sum \boldsymbol{\beta}_n \frac{\mathbf{d}^n \boldsymbol{e}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}^n}$

- **Évolution (réponse) libre** : quand $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{t}$

  $s(t)$: solution de $\sum \alpha_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = 0$

B.3.a. Critère de stabilité

过渡状态结束 -» 最后系统达到稳态

L'opérateur est **stable** si la **réponse libre** $= \mathbf{0}$ **ou** $\rightarrow \mathbf{0}$ au cours du temps.

B.3.b. Ordre 1 : $\alpha_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \alpha_0 s = 0$ Solution : $s(t) = A\exp\left(-\frac{\alpha_0}{\alpha_1} t\right)$

Si $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} < 0$: $|s| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$: instable

→ L'opérateur d'ordre **1** est **stable** si $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1$ soient **de même signe.**

SPEIT

B.3.c. Ordre 2 : $\alpha_2 \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \alpha_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \alpha_0 s = 0$

Équation caractéristique : $\boldsymbol{\alpha_2 r^2 + \alpha_1 r + \alpha_0 = 0}$, $\Delta = \alpha_1{}^2 - 4\alpha_2\alpha_0$

- $\Delta > \mathbf{0}$: 2 racines réelles r_1, r_2

  $\boldsymbol{s(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$: **stable** si $\boldsymbol{r_1, r_2 < 0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 r_2 = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_2} > 0 \\ r_1 + r_2 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} < 0 \end{cases}$$

→ **Stable** : $\boldsymbol{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2}$ **de même signe**

SPEIT

- $\Delta < \mathbf{0}$: 2 racines $r_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm j\sqrt{-\Delta}}{2\alpha_2}$

$|e^{r_1 t}| = e^{-\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}t}$: stable si α_1, α_2 de même signe

$\Delta < 0 \Leftrightarrow {\alpha_1}^2 - 4\alpha_2\alpha_0 < 0 \Rightarrow \alpha_2\alpha_0 > \frac{{\alpha_1}^2}{4} > 0 \Rightarrow \alpha_0, \alpha_2$ de même signe

→ **Stable : $\boldsymbol{\alpha_0}$, $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$ de même signe**

- $\Delta = \mathbf{0}$: même conclusion (exercice)

→ $\boxed{\text{L'opérateur d'ordre } \mathbf{2} \text{ est } \textbf{stable} \text{ si } \boldsymbol{\alpha_0}, \boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2} \text{ soient } \textbf{de même signe.}}$

C. CARACTÉRISATION FRÉQUENCIELLE

$\boldsymbol{s(t)}$ **? en RSE pour** $\boldsymbol{e(t) = E\cos(\omega t + \varphi_e)}$

C.1. Fonction de transfert d'un opérateur linéaire (OL)

C.1.a. Propriété fondamentale

Si **l'entrée** est **sinusoïdale** de pulsation $\boldsymbol{\omega}$**,** alors la **sortie** est aussi **sinusoïdale** avec la **même** pulsation.

C.1.b. Définition

$$\sum \alpha_n \frac{\mathrm{d}^n \underline{s}(t)}{\mathrm{d}t^n} = \sum \beta_n \frac{\mathrm{d}^n \underline{e}(t)}{\mathrm{d}t^n} \Rightarrow \sum \alpha_n (\boldsymbol{j\omega})^{\boldsymbol{n}} \underline{s}(t) = \sum \beta_n (\boldsymbol{j\omega})^{\boldsymbol{n}} \underline{e}(t)$$

Fonction de transfert de l'opérateur : $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) \overset{\text{def}}{=} \frac{\underline{\boldsymbol{s}}}{\underline{\boldsymbol{e}}} = \frac{\sum \boldsymbol{\beta_n}(\boldsymbol{j\omega})^{\boldsymbol{n}}}{\sum \boldsymbol{\alpha_n}(\boldsymbol{j\omega})^{\boldsymbol{n}}}$

SPEIT

C.1.c. Détermination de l'EDC à partir de $\underline{H}(j\omega)$

1. Écrire la fonction de transfert sous la forme : $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \dfrac{\sum \boldsymbol{\beta_n}(\boldsymbol{j\omega})^{\boldsymbol{n}}}{\sum \boldsymbol{\alpha_n}(\boldsymbol{j\omega})^{\boldsymbol{n}}}$

2. Développer la relation entre $\underline{s}$ et $\underline{e}$ sous la forme : $\sum \boldsymbol{\beta_n}(\boldsymbol{j\omega})^{\boldsymbol{n}} \times \underline{\boldsymbol{e}} = \sum \boldsymbol{\alpha_n}(\boldsymbol{j\omega})^{\boldsymbol{n}} \times \underline{\boldsymbol{s}}$

3. Remplacements : $\underline{\boldsymbol{e}} \to \boldsymbol{e}(\boldsymbol{t}), \underline{\boldsymbol{s}} \to \boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}), (\boldsymbol{j\omega})^{\boldsymbol{n}} \to \dfrac{\mathbf{d}^{\boldsymbol{n}}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}}}$

Exercice (Q 3-4) : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}, x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ EDC ?

SPEIT

C.2. Diagramme de Bode

$\boxed{\underline{H}(j\omega) \overset{\text{def}}{=} H(\omega)\exp\big(j\varphi(\omega)\big)}$ avec $H(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right|, \varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$

C.2.a. Sens concrèt

$$e(t) = E\cos(\omega t + \varphi_e) \rightarrow s(t)\,?\quad \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

- $H(\omega) = \dfrac{|\underline{s}|}{|\underline{e}|}$: ***gain*** (en amplitude), $\boxed{\textit{Gain en décibels} : G_{\text{dB}} \overset{\text{def}}{=} 20\log\big(H(\omega)\big)}$
- $\varphi(\omega) = \varphi_s - \varphi_e$ $\longrightarrow$ $\boxed{s(t) = H(\omega) \times E\cos\big(\omega t + \varphi_e + \varphi(\omega)\big)}$

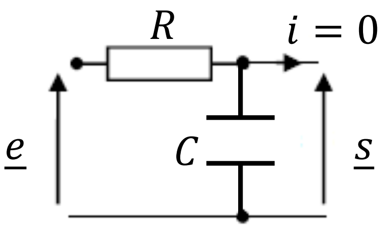
C.2.b. Diagramme de Bode

- On note $x = \dfrac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$, $\omega_{\text{réf}}$: ***pulsation de référence*** à préciser
- 2 courbes
  - G_{dB} en fonction de $\log(x)$: courbe de gain
  - φ en fonction de $\log(x)$: courbe de phase

SPEIT

- Vocabulaire
  - $x_2/x_1 = 10$: x_2 diffère de x_1 par une **décade**
  - $x_2/x_1 = 2$: x_2 diffère de x_1 par une **octave**

C.2.c. Exemple d'une cellule *RC* ouverte



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

On pose $\omega_{\text{réf}} = \dfrac{1}{RC} \Longrightarrow \boldsymbol{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jx}}$

- **Courbe de gain :**

$$\boldsymbol{H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, G_{\text{dB}} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -10\log(1+x^2)}$$

SPEIT

1ère étape : tracer les asymptotes à HF $(x \gg 1)$: $G_{dB} \approx -20\log(x)$

à BF $(x \ll 1)$: $G_{dB} \approx 0$

2ème étape : placer un point facile à tracer

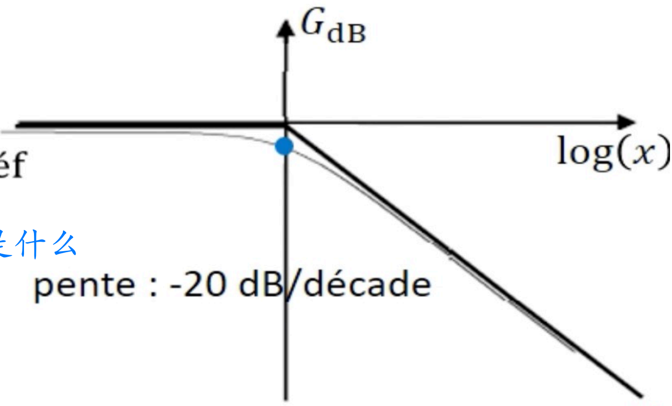
pulsation de coupure à -3dB ω_c : $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3dB$

$$-3dB = -10\log(2) \Longrightarrow \boxed{G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 20\log(\sqrt{2})}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}}$$

i, $H_{max} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \dfrac{1}{RC} = \omega_{réf}$

计算w_c = w_ref的目的是什么



3ème étape : tracer la courbe G_{dB}

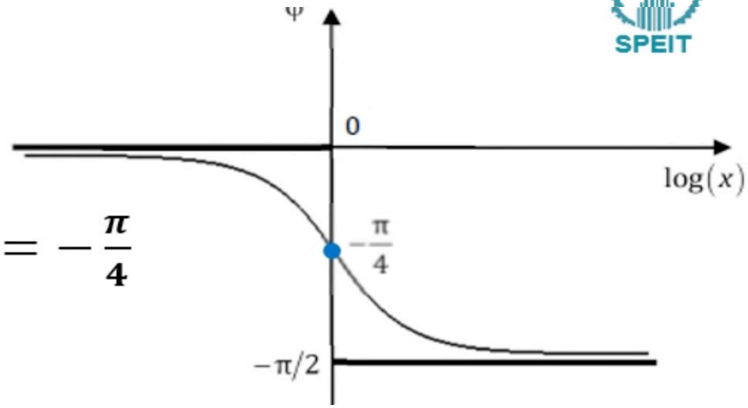
- Courbe de phase : $\varphi(\omega) = -\arctan(x)$

  1ère étape : $x \gg 1 : \varphi(x) \approx -\frac{\pi}{2}$

  $x \ll 1 : \varphi(x) \approx 0$

  2ème étape : placer le point ω_c, $\varphi(x = 1) = -\frac{\pi}{4}$

  3ème étape : tracer $\varphi(x)$



C.3. Opérateurs fondamentaux

C.3.a. Multiplication par une constante

- Domaine temporel : $s(t) = H_0 \times e(t)$ (H_0 constante)
- Domaine fréquenciel : $\underline{H}(j\omega) = H_0$

$$\Longrightarrow H(\omega) = |H_0|, \varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } H_0 > 0 \\ \pi & \text{si } H_0 < 0 \end{cases}$$

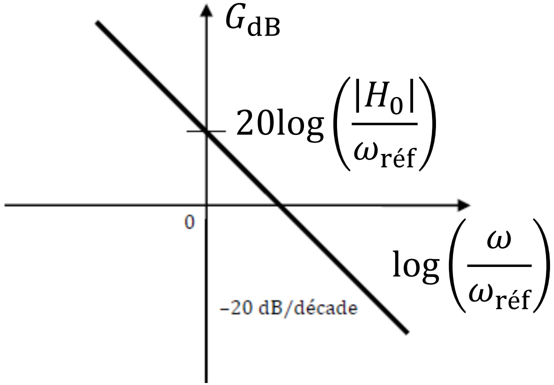
Exemple : pont diviseur de tension avec des R

C.3.b. Intégrateur 积分器

- Temporel : $\frac{\mathbf{ds}(\boldsymbol{t})}{\mathbf{dt}} = \boldsymbol{H_0} \times \boldsymbol{e}(\boldsymbol{t}) \Rightarrow s(t) - s(0) = H_0 \int_0^t e(t)\mathrm{dt}$. Or $\boldsymbol{j\omega}\underline{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{H_0}\underline{\boldsymbol{e}}$
- Fréquenciel : $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \frac{\boldsymbol{H_0}}{\boldsymbol{j\omega}}$

$$H(\omega) = |H_0|/\omega \Rightarrow G_{\mathrm{dB}} = 20\log(|H_0|) - 20\log(\omega)$$

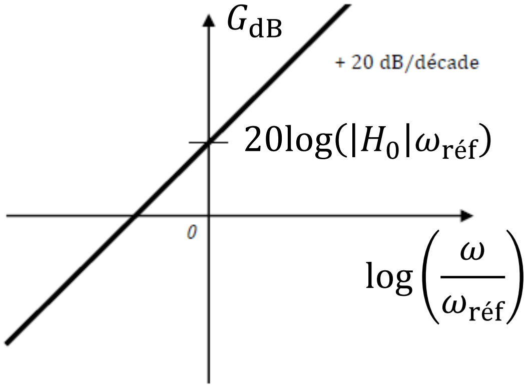
$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } H_0 > 0 \\ \pi/2 & \text{si } H_0 < 0 \end{cases}$$



C.3.c. Dérivateur

- Temporel : $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{H_0}\frac{\mathbf{de}(\boldsymbol{t})}{\mathbf{dt}}$
- Fréquenciel : $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \boldsymbol{H_0 j\omega}$

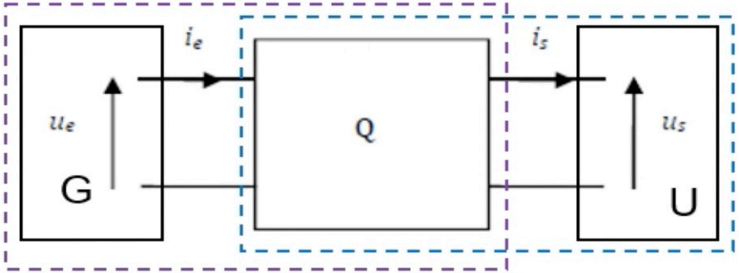
$$\Longrightarrow H(\omega) = |H_0|\omega \Rightarrow G_{\mathrm{dB}} = 20\log(|H_0|) + 20\log(\omega)$$



D. OPÉRATEUR ÉLECTRIQUE – QUADRIPÔLE

D.1. Description électrique

D.1.a. Définition

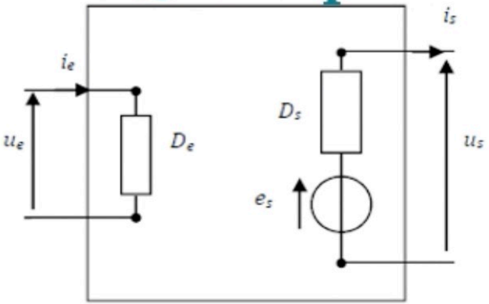


G : générateur U : utilisation

Quadripôle : élément électrique de circuit qui a **4 bornes** avec l'extérieur

- Dipôle vu du générateur
- Dipôle vu de l'utilisateur

D.1.b. Quadripôle unidirectionnel linéaire



- $\boldsymbol{D_e, D_s}$: dipôles **passifs linéaires** (R, L, C)
- $\boldsymbol{e_s}$ **dépend linéairement de** $\boldsymbol{u_e}$

D.1.c. Impédances d'entrée et de sortie

Impédance d'entrée : $\underline{Z_e} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$

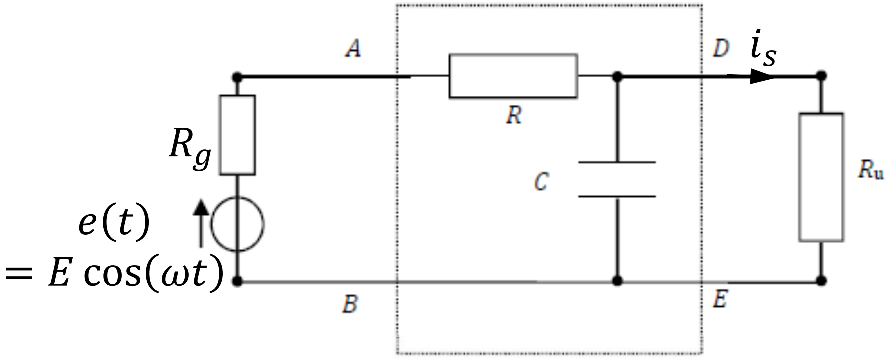
Impédance de sortie : $\underline{Z_s} \overset{\text{def}}{=} -\left.\dfrac{\underline{u_s}}{\underline{i_s}}\right|_{\text{avec sources éteintes}}$

- **En RSE :** $\underline{u_s} = \underline{e_s} - \underline{Z_s}\,\underline{i_s}$

Ici, $\underline{e_s} = \underline{H}(j\omega) \times \underline{u_e}$ avec $\underline{H}(j\omega)$ fonction de transfert **en sortie ouverte**

- Le quadripôle est dit **idéal en entrée** si $\underline{Z_e} \to \infty$
  en sortie si $\underline{Z_s} \to 0$

D.2. Exemple



Z_e? Z_s? $\underline{e_s}$?

- $\boldsymbol{Z_e = R + \frac{R_u Z_C}{R_u + Z_C}} = R + \frac{R_u}{1 + jR_u C\omega}$

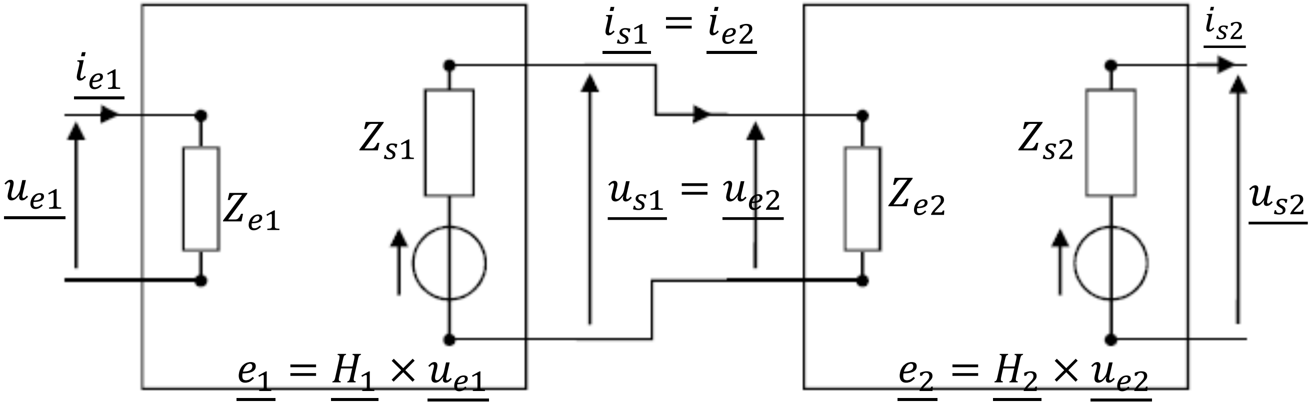
- Z_s : sources éteintes ($\boldsymbol{e(t)}$ $\Rightarrow$ **fil**) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{Z_s = \frac{(R+R_g)Z_C}{R+R_g+Z_C}} = \frac{R+R_g}{1+j(R+R_g)C\omega}$

- $\boldsymbol{\underline{e_s} = \underline{u_s}}$ **en sortie ouverte** $\boldsymbol{(i_s = 0)}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\underline{e_s} = \frac{Z_C}{Z_C + R + R_g}\underline{e}} = \frac{\underline{e}}{1 + j(R+R_g)C\omega}$$

Remarque : $Z_e, Z_s, \underline{e_s}$ ne dépendent pas seulement du **quadripôle lui-même**, mais aussi des **éléments connectés à l'entrée et à la sortie**.

D.3. Association de quadripôles : 2 quadripôles en cascade



$$\underline{H} = \frac{\underline{e_2}}{\underline{u_{e1}}}\ ?$$

$$\underline{e_2} = \underline{H_2} \times \underline{u_{e2}}, \underline{u_{e2}} = \frac{Z_{e2}}{Z_{e2} + Z_{s1}} \underline{e_1}, \underline{e_1} = \underline{H_1} \times \underline{u_{e1}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{H} = \underline{H_2} \times \underline{H_1} \times \frac{Z_{e2}}{Z_{e2} + Z_{s1}}}$$

- Cas simples

$$Z_{s1} = 0 \text{ ou } Z_{e2} \to \infty \Rightarrow \underline{H} = \underline{H_2} \times \underline{H_1}$$