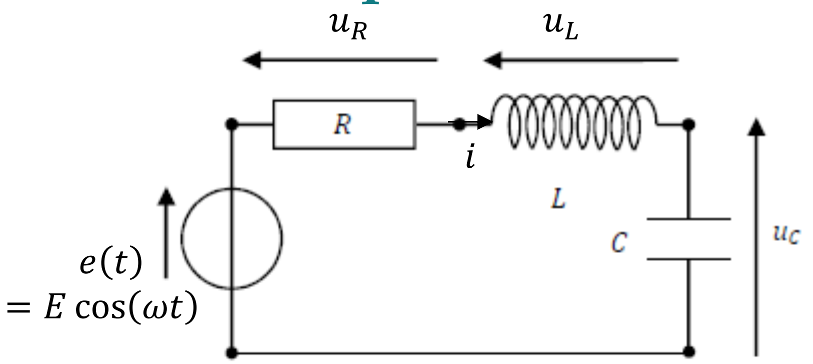
CHAPITRE 2
CIRCUIT *RLC* EN RSE - RÉSONANCE

SPEIT

A. RSE

A.1. Tension aux bornes du condensateur

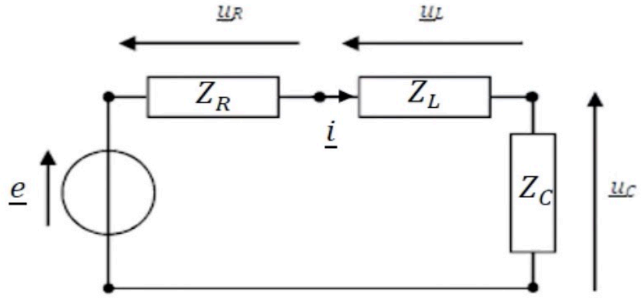
A.1.a. Équation d'évolution



$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=e(t)$$

A.1.b. Solution en RSE : tension complexe

RSE



$$\underline{u_C} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R}\underline{e} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}\underline{e}$$

Posons ***pulsation réduite*** $x = \omega/\omega_0$

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{u_C}} = \frac{\underline{\boldsymbol{e}}}{\boldsymbol{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}}$$

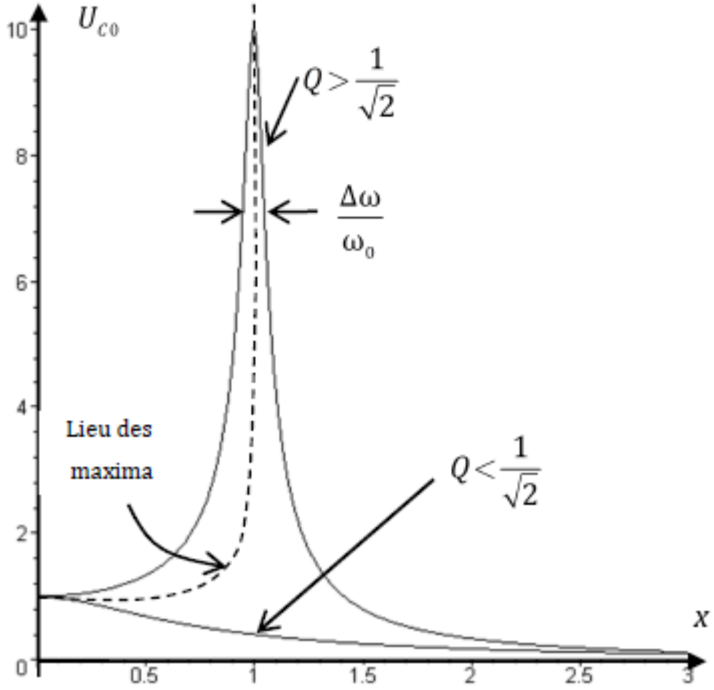
A.1.c. Amplitude

$$\boxed{\boldsymbol{U_{C0}} = |\underline{\boldsymbol{u_C}}| = \frac{\boldsymbol{E}}{\sqrt{(\boldsymbol{1 - x^2})^2 + \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{Q^2}}}}}$$

SPEIT

Posons $f(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$

- Si $\boldsymbol{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$: 2 extréma en $\boldsymbol{x = 0}$ et $\boldsymbol{x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$
- Si $\boldsymbol{Q < \frac{1}{\sqrt{2}}}$: 1 extrémum en $\boldsymbol{x = 0}$



SPEIT

A.1.d. Système faiblement amorti $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: résonance en tension du condensateur

U_{C0} **maximale en** $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ *(pulsation de résonance)* : *résonance*

$$U_{C0\max} = \frac{E}{\sqrt{(1 - {x_r}^2)^2 + \frac{{x_r}^2}{Q^2}}} \longrightarrow \boxed{U_{C0\max} = \frac{EQ}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

Remarque :

- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (système très amorti) : U_{C0} décroit de façon monotone, **pas de résonance**
- $\boxed{\text{Si } Q \gg 1 : \omega_r \approx \omega_0, U_{C0\max} \approx EQ}$ $\gg E$: surtension de résonance

SPEIT

A.1.e. Largeur de résonance

- **Définition :** $$\boxed{U_{C0}(\omega_{1,2}) = \frac{U_{C0\max}}{\sqrt{2}} \quad (\omega_1 < \omega_2),\ \Delta\omega \overset{\text{def}}{=} \omega_2 - \omega_1}$$

$$\frac{E}{\sqrt{\left(1 - {x_{1,2}}^2\right)^2 + \frac{{x_{1,2}}^2}{Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EQ}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \Rightarrow x_{1,2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}\left(\pm\sqrt{4Q^2 - 1} - 1\right)}$$

- **$Q \gg 1$:**

$\pm\sqrt{4Q^2 - 1} - 1 \approx \pm 2Q \Rightarrow x_{1,2} \approx \sqrt{1 \pm 1/Q}$. Or $(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon})^{\boldsymbol{n}} \approx \mathbf{1} + \boldsymbol{n\varepsilon}\ (\boldsymbol{\varepsilon} \ll \mathbf{1})$

Alors $x_{1,2} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q} \Rightarrow \Delta x = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{Q}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\textbf{Pour } \boldsymbol{Q} \gg \mathbf{1} : \Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}}$

A.1.f. Phase

- $\boldsymbol{\varphi_C}$ par rapport à $e(t) = \mathbf{arg}\left(\underline{\boldsymbol{u}_C}\right)$

  - Méthode 1 : $\boldsymbol{\varphi_C} = \mathbf{arg}(\underline{\boldsymbol{e}}) - \mathbf{arg}(\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{j}\,\boldsymbol{x}/\boldsymbol{Q})$

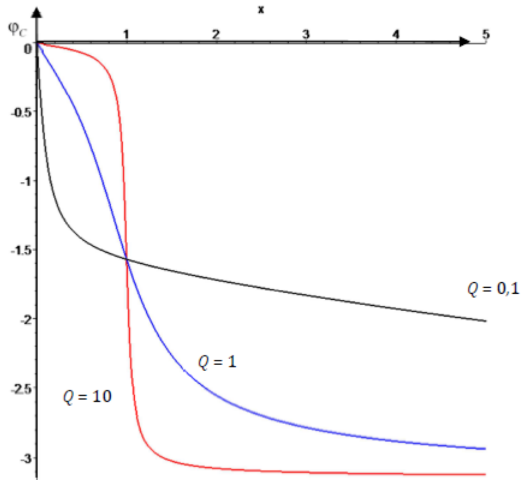
Remarque : $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{arg}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bj})$ $\begin{cases} \text{si } \boldsymbol{a} > 0, & \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{arctan}(\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}) \\ \text{si } \boldsymbol{a} < 0 \text{ et } \boldsymbol{b} > 0, & \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\pi} + \mathbf{arctan}(\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}) \\ \text{si } \boldsymbol{a} < 0 \text{ et } \boldsymbol{b} < 0, & \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{arctan}(\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{\pi} \end{cases}$

$\varphi \in \left]-\pi, \pi\right]$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \boldsymbol{x} < \mathbf{1} : \boldsymbol{\varphi_C} = -\mathbf{arctan}\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{Q}(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^2)} \\ \text{Si } \boldsymbol{x} > \mathbf{1} : \boldsymbol{\varphi_C} = -\boldsymbol{\pi} - \mathbf{arctan}\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{Q}(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^2)} \\ \text{Si } \boldsymbol{x} = \mathbf{1} : \boldsymbol{\varphi_C} = -\boldsymbol{\pi}/\mathbf{2} \end{array}}$$

- Méthode 2 :

$$\underline{u_C} = \frac{\underline{e}\left(-\frac{jQ}{x}\right)}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\varphi_C = -\frac{\pi}{2} - \arctan Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$



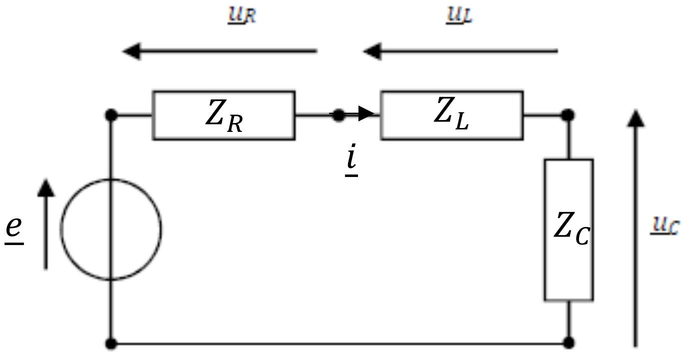
Cas limites :

- À BF $(x \to 0)$: $\varphi_C \to 0$
- À HF $(x \to +\infty)$: $\varphi_C \to -\pi$

Plus $\boldsymbol{Q}$ est **grand**, plus la **transition** de 0 à -π est **brutale**.

A.2. Intensité dans le circuit

A.2.a. Intensité complexe

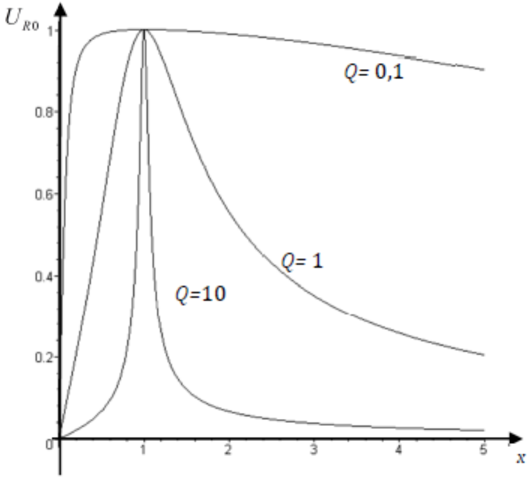


$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{Z_C + Z_L + Z_R} = \frac{\underline{e}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R}$$

$$Q = L\omega_0/R \longrightarrow \boxed{\underline{\boldsymbol{i}} = \frac{\underline{\boldsymbol{e}}}{\boldsymbol{R}\left[1 + j\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{x} - \frac{1}{\boldsymbol{x}}\right)\right]}}$$

A.2.b. Résonance en intensité

- **Amplitude** : $I = |\underline{i}| = \dfrac{E}{R\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$



$\boxed{\textbf{Résonance quand } \boldsymbol{x = 1\ (\omega_r = \omega_0), \forall Q : I_{\max} = E/R}}$

- **Largeur de résonance** :

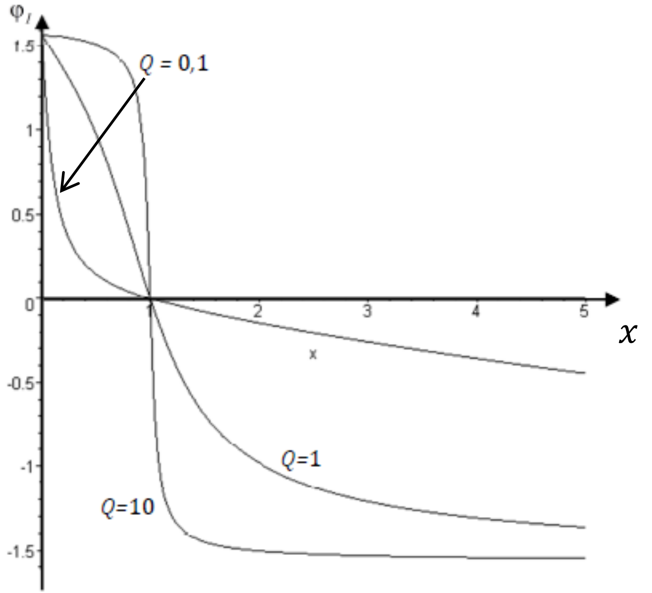
$$\Rightarrow \frac{E}{R\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{E}{R\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1 + Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 2 \Rightarrow Q\left(x-\frac{1}{x}\right) = \pm 1 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}}$$

SPEIT

A.2.c. Phase

$$\boldsymbol{\varphi_i = \arg(\underline{i}) = \arg\left(\frac{\underline{e}}{R\left[1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]}\right) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)}$$



- **Cas limites :**
  - À BF : $\varphi_i \to \pi/2$
  - À HF : $\varphi_i \to -\pi/2$
  - $x = 1 : \varphi_i = 0, \ \forall Q$

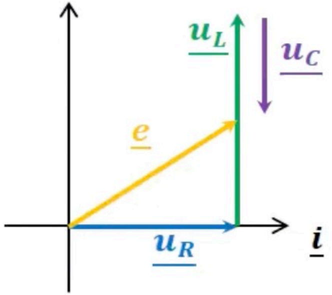
Remarque :

- $x_{1,2} : x - \frac{1}{x} = \pm\frac{1}{Q} \Longrightarrow \varphi_i(x_1) = \frac{\pi}{4}, \varphi_i(x_2) = -\frac{\pi}{4}$
- $Z_C = \frac{\underline{u_C}}{\underline{i}} = \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow \underline{i} = jC\omega\underline{u_c} \Rightarrow \varphi_i = \frac{\pi}{2} + \varphi_C$

A.2.d. Construction de Fresnel

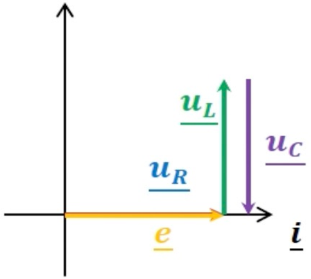
- $\underline{e} = \underline{u_R} + \underline{u_L} + \underline{u_C}$

avec $\underline{u_R} = R\underline{i}, \underline{u_C} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i}, \underline{u_L} = jL\omega\underline{i}$



- À la **résonance**

$$\boldsymbol{\omega_r} = \boldsymbol{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$$



$$\Rightarrow \boldsymbol{Z} = R + \frac{1}{jC\omega_0} + jL\omega_0 = R + jL\omega_0 - \frac{j}{C\omega_0} = \boldsymbol{R}$$

SPEIT

A.3. Résonance de puissance

- La **puissance fournie** par le **générateur** est **totalement dissipée dans $\boldsymbol{R}$ (valeur moyenne)** :

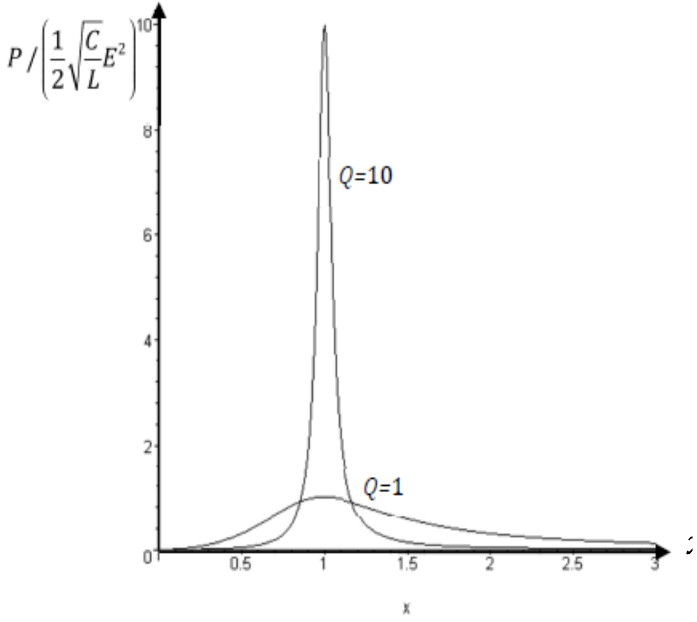
$$\mathcal{P} = R{i_{\text{eff}}}^2 = R\frac{I^2}{2} = \frac{E^2}{2R}\cdot\frac{1}{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$$

- **Influence de $\boldsymbol{Q(R)}$** en supposant $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{C}$ **et $\boldsymbol{E}$ fixées**

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\mathcal{P} = \frac{E^2}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{Q}{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}}$$

SPEIT

$$\boxed{\textbf{Résonance quand } \omega_r = \omega_0, \forall Q : \mathcal{P}_{\max} = \frac{E^2}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}Q}$$



Largeur à mi-hauteur

$$\Delta_{1/2}\omega = \omega_2 - \omega_1 : \mathcal{P}(\omega_{1,2}) = \frac{\mathcal{P}_{\max}}{2}$$

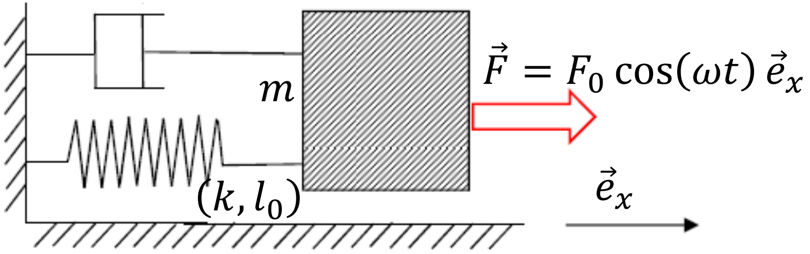
$$\Longrightarrow Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\Delta_{1/2}\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

SPEIT

B. OSCILLATEUR MÉCANIQUE EN RSE

B.1. Position du problème

Amortissment visqueux λ



Force de frottement visqueux : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$

- **PFD sur x :** $\boldsymbol{m \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F - \lambda \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - k(l - l_0)}$

On note $\xi = l - l_0$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $Q = m\omega_0/\lambda$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 \xi = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

- Rappel : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u_C(t) = {\omega_0}^2 e(t)$

B.2. Résonance en déplacement

- En **RSE** : $\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi_\xi)$

$$\longrightarrow \underline{\xi} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0 \omega}{Q}}$$

SPEIT

$$x = \omega/\omega_0 \longrightarrow \underline{\xi} = \frac{F_0}{m{\omega_0}^2} \cdot \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

$$\Longrightarrow \xi_0 = \left|\underline{\xi}\right| = \frac{F_0}{m{\omega_0}^2 \sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Résonance : même que u_C (voir p46 du poly)

Cas limites :

- À HF $\omega \to +\infty$: $\xi_0 \to 0$: m **ne peut pas suivre** l'excitation de F
- À BF $\omega \to 0$: $\xi_0 \to \frac{F_0}{m{\omega_0}^2}$: m **peut suivre exactement** les oscillations de F

B.3. Résonance en vitesse

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} \rightarrow \underline{v} = j\omega\underline{\xi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\underline{v} = \frac{F_0 Q}{m\omega_0} \cdot \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

(Même forme que $\underline{i}$)

B.4. Résonance en puissance

Puissance instantanée fournie par la force $\vec{F}$: $\boldsymbol{\mathcal{P}(t) = F(t) \times v(t)}$

$$\Longrightarrow \langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{F} \cdot \underline{v}^*\right) = \frac{{F_0}^2 Q}{2m\omega_0} \cdot \frac{1}{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

Exercice : $P = \lambda\langle v^2 \rangle$

C. COMPLÉMENTS

C.1. Régime transitoire

$$RLC : \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C(t)}{dt} + {\omega_0}^2 u_C(t) = {\omega_0}^2 e(t)$$

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) \quad \begin{cases} u_{Cp}(t) = u_{C,\mathrm{RSE}} = U_{C0}\cos(\omega t + \varphi_C) \\ \dfrac{d^2u_{Ch}}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{du_{Ch}}{dt} + {\omega_0}^2 u_{Ch} = 0 \end{cases}$$

- **Pseudo-périodique** $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$: $\boldsymbol{u_{Ch}(t) = \exp(-t/\tau)[\alpha\cos(\Omega t) + \beta\sin(\Omega t)]}$

$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$: pseudo-pulsation, $\tau = \frac{2L}{R}$, α,β constantes dépendantes des C.I.

$$\boxed{\text{Le RSE est atteint après environ } \boldsymbol{QT_0}\ \forall \mathbf{C.I.}}$$

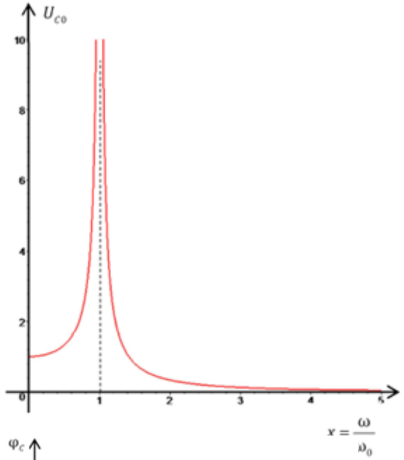
C.2. Cas d'un oscillateur non dissipatif $(\boldsymbol{R = 0, \lambda = 0})$

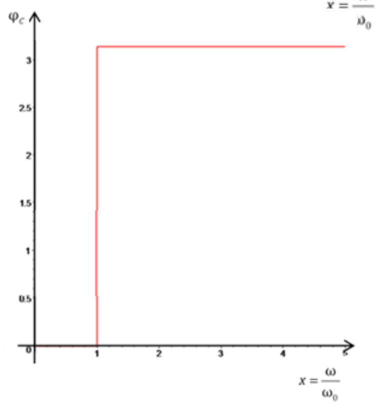
SPEIT

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 u_C(t) = {\omega_0}^2 e(t)$$

- **Solution en RSE :** $\underline{\boldsymbol{u_C}}(\boldsymbol{t}) = \dfrac{\boldsymbol{{\omega_0}^2 \underline{e}(t)}}{\boldsymbol{{\omega_0}^2 - \omega^2}}$

$$\longrightarrow u_C(t) = \frac{{\omega_0}^2 E}{|{\omega_0}^2 - \omega^2|}\cos(\omega t + \varphi_C) \text{ avec } \varphi_C = \begin{cases} 0 & \omega < \omega_0 \\ \pi & \omega > \omega_0 \end{cases}$$





- **Régime transitoire :** $\boldsymbol{u_{Ch} = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)}$

Remarque : En l'absence de dissipation $(Q \to +\infty)$
Cette solution n'est jamais négligeable. On **n'arrive jamais en RSE.**