CHAPITRE 1
CIRCUITS ÉLECTRIQUES
EN RÉGIME SINUSOÏDAL ÉTABLI (RSE)

A. FONCTIONS SINUSOÏDALES

A.1. Deux formes

- **Signal sinusoïdal**

$$\boldsymbol{s(t) = C\cos(\omega t + \varphi)}$$

C : ***amplitude***
ω : ***pulsation*** (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
φ : ***phase à l'origine des temps***

- $\boldsymbol{s(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}\,, \cos\varphi = \frac{A}{C}\,, \sin\varphi = -\frac{B}{C}$$

A.2.-3. Grandeurs dérivées

SPEIT

- **Amplitude crête à crête :** $\boldsymbol{A}_{\mathbf{pp}} = s_{\max} - s_{\min} = \boldsymbol{2C}$

  peak to peak

- **Valeur efficace** (amplitude RMS) **:** $\boldsymbol{A}_{\mathbf{eff}} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\boldsymbol{C}}{\sqrt{2}}$

- **Période :** $\boldsymbol{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $s(t+T) = s(t)$

- $\boxed{\textbf{Fréquence : } \boldsymbol{f} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}}$ (en Hz)

A.4. Phase

SPEIT

- **Origine des temps t_0**

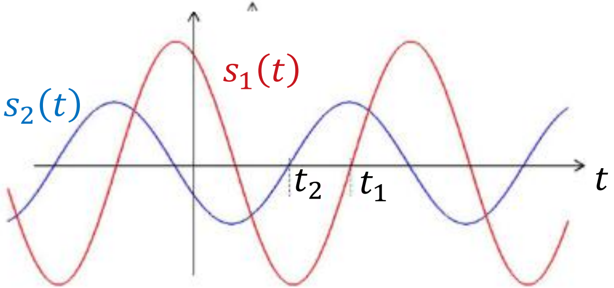
$$t' = t - t_0 \rightarrow s(t) = C\cos(\omega t' + \overbrace{\varphi + \omega t_0}^{\varphi'}) = s(t')$$

Très fréquent : choisir t_0 tel que $\varphi' = 0$

- **Déphasage entre deux signaux de même ω**

$$s_1(t) = C_1\cos(\omega t + \varphi_1)\,, s_2(t) = C_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$\boxed{\textbf{Déphasage de 2 par rapport à 1 : } \delta\varphi_{2/1} \overset{\text{def}}{=} \varphi_2 - \varphi_1}$ On choisit $\delta\varphi_{2/1} \in \,]-\pi, \pi]$



$$\delta\varphi_{2/1} = 2\pi\frac{t_1 - t_2}{T} > 0$$

SPEIT

Vocabulaire : voir poly P9

超前的

Si $\delta\varphi_{2/1} > 0$, on dit que le signal 2 est ***en avance*** sur le signal 1. Il s'annule, dans un sens donné, avant le signal 1 $(t_2 < t_1)$.

滞后

Si $\delta\varphi_{2/1} < 0$, le signal 2 est ***en retard*** sur le signal 1.

同相的

Si $\delta\varphi_{2/1} = 0$, le signal 2 et le signal 1 sont dits ***en phase***.

Les cas particuliers suivants sont très importants et leur dénomination est à connaître.

- Deux signaux ***en opposition de phase*** sont décalés d'une demi-période : $\delta\varphi_{2/1} = \pm\pi$.

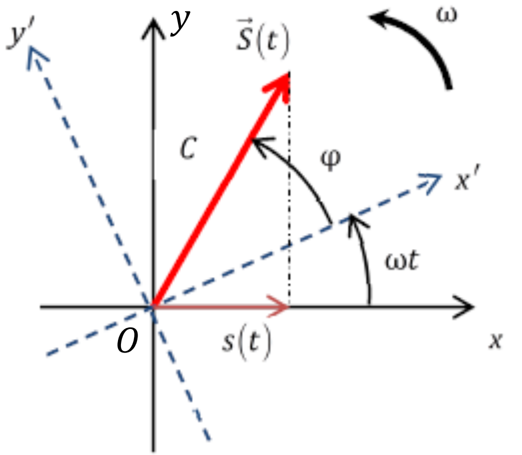
  反相的

- Deux signaux ***en quadrature de phase*** sont décalés d'un quart de période : $\delta\varphi_{2/1} = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

  相位正交

A.5. Représentation de Fresnel

Principe



On associe $s(t)$ un **vecteur tournant** $\vec{S}(t)$:

- Norme $\propto C$
- $\left(\vec{S}(t), Ox\right) = \omega t + \varphi$

$\longrightarrow$ $s(t) = \vec{S}(t) \cdot \vec{e}_x$

Somme de deux signaux sinusoïdaux de même ω

$$\begin{cases} s_1(t) = C_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \to \overrightarrow{S_1} \\ s_2(t) = C_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \to \overrightarrow{S_2} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{s_1 + s_2 \to \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2}}$$

Exercice : Question 1-3

SPEIT

A.6. Représentation complexe

Convention : $j^2 = -1$: $|j| = 1, \arg(j) = \frac{\pi}{2}$

Définition

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{s}(t) \stackrel{\text{def}}{=} s(t) + js\left(t - \frac{T}{4}\right) &= C[\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)] \\ &= Ce^{j(\omega t + \varphi)}\end{aligned}}$$

$$\longrightarrow s(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{s}(t)\right)$$

$\boxed{\textit{Amplitude complexe} : \underline{s} \stackrel{\text{def}}{=} Ce^{j\varphi}}$ $\longrightarrow$ $C = |\underline{s}|, \varphi = \arg(\underline{s})$

Utilisation

- Somme de signaux sinusoïdaux de même ω : $\underline{s_1 + s_2} = \underline{s_1} + \underline{s_2}$
- $\underline{\lambda s_1} = \lambda \underline{s_1}$ (λ constante réelle)

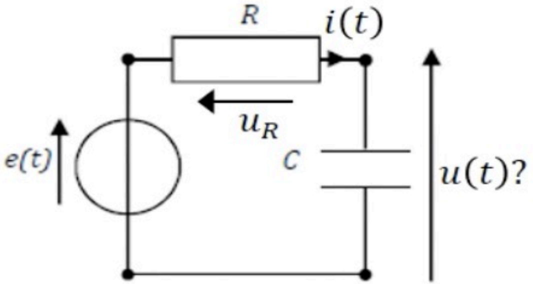
Exercice : Question 1-6

Dérivation

$$\frac{\mathrm{d}\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t} = j\omega \underline{s}(t), \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^n \underline{s}(t)}{\mathrm{d}t^n} = (j\omega)^n \underline{s}(t)}$$

B. NOTION DE RÉGIME SINUSOÏDAL ÉTABLI (RSE)

B.1. Exemple : circuit RC



$$e(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ E_0 \cos(\omega t) & t > 0 \end{cases}, \quad \text{C.I. : } u(t = 0^-) = 0$$

$$\begin{cases} u_R(t) = R \cdot i(t) \\ i(t) = C \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \\ u_R(t) + u(t) = e(t) \text{ (loi des mailles)} \end{cases}$$

$$\longrightarrow RC \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = e(t) = E_0 \cos(\omega t) \text{ pour } t > 0$$

B.1.a. Rappel mathématique

$$\sum_i \alpha_i \frac{\mathrm{d}^i u(t)}{\mathrm{d}t^i} = F(t) \quad (1),\ \alpha_i \text{ constantes}$$

Équation libre / homogène / sans seconde membre associée : $\sum_i \alpha_i \frac{\mathrm{d}^i u(t)}{\mathrm{d}t^i} = 0$

Toute **solution** de (1) est la **somme** d'une solution **particulière** de (1) et d'une solution de l'équation **homogène** associée :

$$\boldsymbol{u(t) = u_h(t) + u_p(t)}$$

B.1.b. Évolution de $u(t)$

$RC \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$

Solution : $\boldsymbol{u_h(t) = A\exp(-t/\tau)}$ **avec** $\boldsymbol{\tau = RC}$, A constante dépendante de C.I.

SPEIT

- $u_p(t)$? $u_p(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ U_0, φ ?

$$\longrightarrow u_p(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \cos\big(\omega t - \arctan(\tau\omega)\big)$$

除非题目要求用复数表示法表示，否则最后都要化成实数的形式

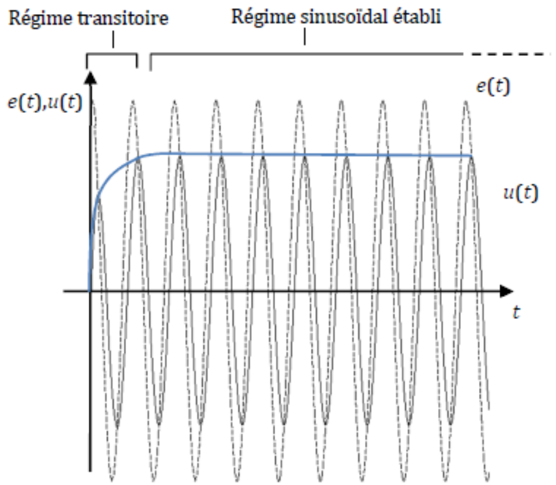
Remarque : **Il ne faut pas oublier repasser des réels pour obtenir la solution physique** en prenant la partie réelle de la solution complexe obtenue après l'utilisation de représentation complexe.

SPEIT

$$u(t) = A\exp(-t/\tau) + U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Or u(0+) = u(0-) = 0 => A= -U_0cos φ

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{u(t) = -U_0 \cos\varphi \exp(-t/\tau) + U_0 \cos(\omega t + \varphi)} \\ \text{avec } \boldsymbol{U_0 = \dfrac{E_0}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}} \ \textbf{et } \boldsymbol{\varphi = -\arctan(\tau\omega)} \end{array}}$$



B.1.c. Régime sinusoïdal établi (RSE) et régime transitoire

permanent 以规律的状态
stationnaire 以静止状态

- $t \gg \tau \; (t \geq \mathbf{qq}.\,\tau)$: **RSE** 所有电量在源ω的脉动处呈正弦变化。

Toutes les grandeurs électriques varient sinusoïdalement à la pulsation de la source ω.

- **Avant RSE : régime transitoire** RSE之前：过渡状态

注意：ESR（特殊解决方案）不依赖于 C.I.(初始状态)，只有过渡制度（均质解决方案）取决于 CI。

Remarque : Le RSE (solution particulière) ne dépend pas de C.I. Seul le régime transitoire (solution homogène) dépend des C.I.

B.2. Généralisation

当所有电量也以相同的脉动正弦变化时，由正弦源供电的电路在 ESR 中工作。

Un circuit électrique alimenté par une source sinusoïdale fonctionne en **RSE** quand **toutes** les grandeurs électrique varient aussi **sinusoïdalement** avec la **même** pulsation.

RSE : courant alternatif (CA) $\Leftrightarrow$ courant continu (CC)

C. DIPÔLES LINÉAIRES (DL) EN RSE

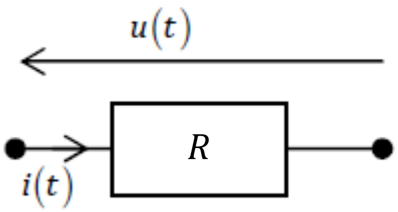
C.1. Dipôles à réponse linéaire (dipôle linéaire)

Vérifie le *principe de superposition* :

états (de fonctionnement) $(i_1(t), u_1(t))$, $(i_2(t), u_2(t))$
$(\lambda i_1(t) + \mu i_2(t), \lambda u_1(t) + \mu u_2(t)\ )$ est aussi un état

Admis : Pour un **dipôle linéaire,** $\boldsymbol{u(t)}$ et $\boldsymbol{i(t)}$ sont des fonctions **sinusoïdales** à la **même** pulsation.

Exemples

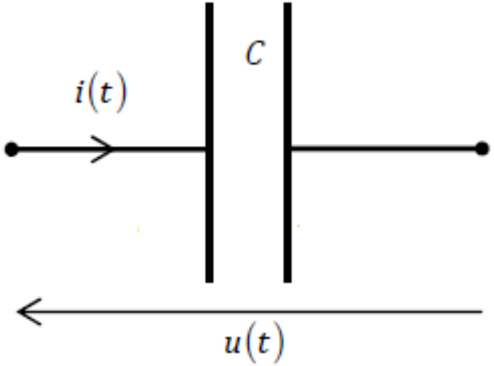


相位差为0，en phase

$$\boldsymbol{u(t) = R \times i(t)}$$

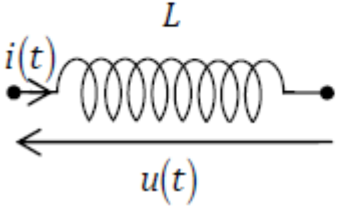
$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{u(t) = Ri_0 \cos(\omega t + \varphi_i)}$$



$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{i(t)} =$$

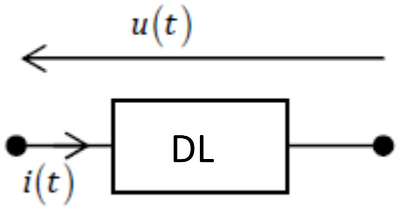


$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{u(t)} =$$

C.2. Impédance et admittance complexes

C.2.a. Définition



en RSE : $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$, $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$

C.2.b. Résistance

C.2.c. Condensateur (capacité)

Remarque : Z_C dépend non seulement du dipôle lui-même (C), mais aussi du signal qui le traverse (ω).

Propriétés

- La tension est en **quadrature retard** par rapport à l'intensité.
- **Comportements limites**

C.2.d. Bobine (inductance)

Propriétés

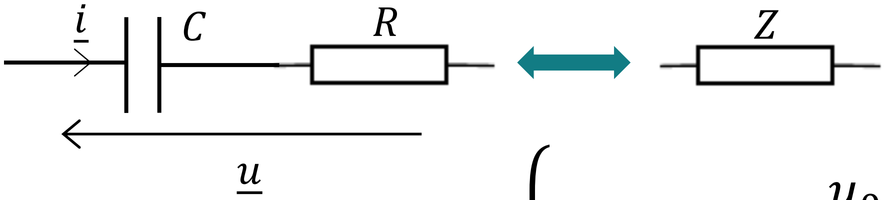
- La tension est en **quadrature avance** par rapport à l’intensité.
- **Comportements limites**

C.3. Associations de DL passifs (en convention récepteur)

En **série :**

En **parallèle :**

Exemple :



$$\boldsymbol{Z = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{u_0}{i_0} = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(C\omega)^2}} \\ \varphi_u - \varphi_i = \arg\left(R - \dfrac{j}{C\omega}\right) = -\arctan\left(\dfrac{1}{RC\omega}\right) \end{cases}$$

Comportements limites

- HF :

- BF :

Plus précisément

- HF : $|Z_R| \gg |Z_C| \Rightarrow R \gg \dfrac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega \gg \dfrac{1}{RC}$
- BF : $\omega \ll \dfrac{1}{RC}$

pulsation référentielle

C.4. DL actifs – sources (en convention générateur)

C.4.a. Représentation de Thévenin

- Source de tension sinusoïdale idéale : $u = e$，任意i
- Source réelle avec impédance interne :

C.4.b. Représentation de Norton

- Source de courant idéale :
- Source réelle :

C.4.c. Passage

SPEIT

D. RÉSEAUX LINÉAIRES (RL) EN RSE

D.1. Réseaux linéaires en RSE dans l'ARQS

- Toutes les lois, propriétés établies pour des RL en régime stationnaire (RS) sont généralisables en **RSE** par les **grandeurs complexes** (ex : $\underline{u}, \underline{i}, Z_g, \underline{e}, \underline{\eta}$).

- $\boxed{\textbf{ARQS : } L \ll c \times \frac{1}{\omega}}$

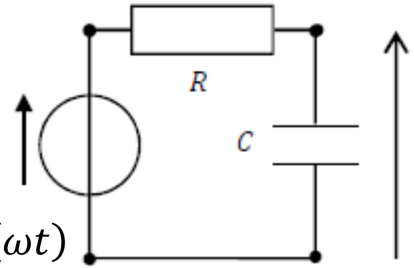
  $1/\omega$: temps caractéristique d'évolution
  L : dimension caractéristique du circuit
  c : vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide

- Dans le cas où le **temps de propagation du signal** est **très petit** devant la **durée de variation (T)** du signal, on peut utiliser en RSE les mêmes théorèmes qu'en RS avec

  R -> Z , G -> Y , U -> $\underline{u}$, I -> $\underline{i}$, e -> $\underline{e}$, η -> $\underline{\eta}$

D.2. Théorèmes des réseaux linéaires en RSE

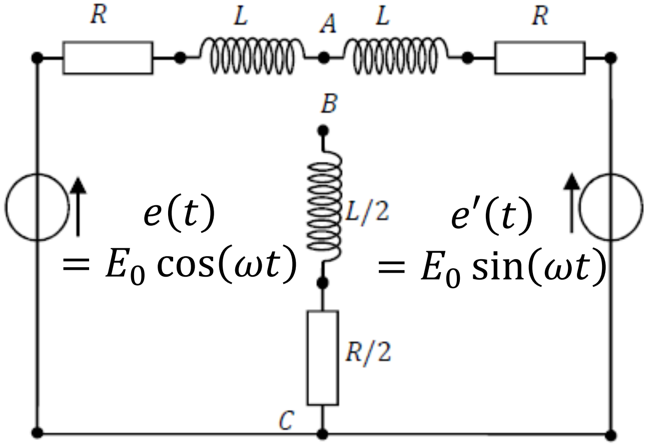
D.2.a. Circuit *RC*



$u(t)$?

$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$

D.2.b. Représentation de Thévenin



<u>**Exercice**</u> : Théorèmes de Thévenin et de Norton

SPEIT

E. PUISSANE EN RSE

E.1. Valeur moyenne d'une grandeur périodique

E.1.a. Définition

Valeur moyenne d'une fonction $\boldsymbol{T}-$ **périodique** $f(t)$:

Remarque : $\langle f \rangle$ indépendante du choix de t_0

E.1.b. Résultats fondamentaux

$s(t) = C\cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow$

E.1.c. Valeur moyenne d'un produit de fonctions sinusoïdales de même ω

$s_1(t) = C_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $s_2(t) = C_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

- $\langle \boldsymbol{s_1 s_2} \rangle = \boldsymbol{C_1 C_2} \langle \mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi_1}) \, \mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi_2}) \rangle$

  Or $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

SPEIT

Cas particuliers

- Si $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2}$, alors $\langle s_1 s_2\rangle =$

- Si $s_1 = s_2$, alors $\langle s_1 s_2\rangle =$

Remarque : $s_1(t) = C_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, $s_2(t) = C_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

$$\langle s_1 s_2\rangle = \frac{C_1C_2}{2}\left[\underbrace{\langle\cos\big((\omega_1+\omega_2)t+\varphi_1+\varphi_2\big)\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle\cos\big((\omega_1-\omega_2)t+\varphi_1-\varphi_2\big)\rangle}_{=0}\right]$$

$\longrightarrow$ $\boldsymbol{\langle s_1 s_2\rangle = 0}$ **!!!**

SPEIT

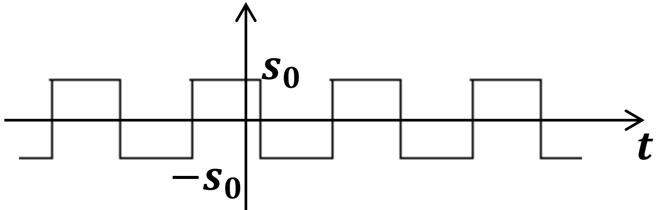
E.1.d. Expression en fonction des représentations complexes

$$\underline{s_1} = C_1 e^{j\varphi_1}, \underline{s_2} = C_2 e^{j\varphi_2}$$

$$\underline{s_1} \cdot \underline{s_2}^* = C_1 e^{j\varphi_1} \cdot C_2 e^{-j\varphi_2} = C_1 C_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \Longrightarrow \mathrm{Re}\left(\underline{s_1} \cdot \underline{s_2}^*\right) = C_1 C_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

E.1.e. Valeur efficace d'un signal périodique

- $s(t) = C\cos(\omega t + \varphi)$: $\boldsymbol{s_{\mathrm{eff}}} = \sqrt{C^2/2} = \boldsymbol{C/\sqrt{2}}$
- Signal créneau (carré) :



$s_{\mathrm{eff}} = s_0$

SPEIT

E.2. Puissance reçue par un dipôle

- **Puissance instantanée**

Puissance par un dipôle en

$\mathcal{P}(t) =$

- **Dipôle linéaire en RSE : facteur de puissance**

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi_u)\,, i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Expression avec des impédances et admittances

SPEIT

E.3. Dipôles fondamentaux

E.3.a. Résistance

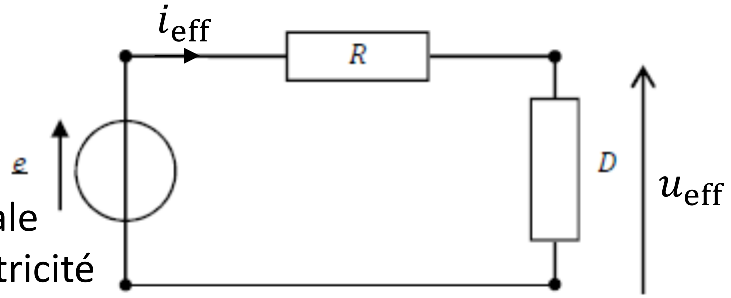
- $\langle p \rangle \geq 0$: récepteur
- Avec i constante, on aurait $\langle \mathcal{P} \rangle = \boldsymbol{R \cdot i^2} = \boldsymbol{R \cdot i_{\mathrm{eff}}}^{\mathbf{2}}$

c.a.d. L'intensité (tension) efficace est la valeur d'une intensité (tension) constante qui donnerait la même puissance dissipée.

E.3.b. Condensateur et bobine

- Condensateur :
- Bobine :
- Pour C et L : u et i sont en

E.4. Exemples d’application
E.4.a. Distribution d’énergie électrique



Centrale d’électricité

R : résistance de lignes électriques

D : utilisation domestique

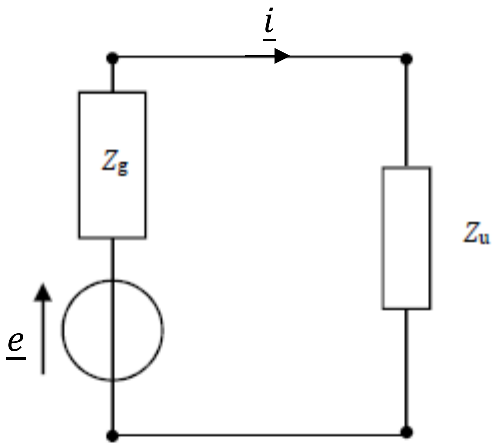
- $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\boldsymbol{u}} =$

utile

- Puissance dissipée par effet Joule dans R : $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\boldsymbol{J}} =$

SPEIT

E.4.b. Adaptation d'impédance



$Z_u =$, $Z_g =$

$\mathcal{P}_u =$, $\underline{i} = \dfrac{\underline{e}}{Z_u + Z_g} \rightarrow$

$\longrightarrow$ $\boldsymbol{\mathcal{P}_u} =$

- Pour **maximiser** $\mathcal{P}_u$:

$\longrightarrow$ **RSE** : la **puissance reçue** par le dipôle Z_u est **maximale** si